

А. В. Сясев

Диференціальні рівняння

Навчальний посібник

Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет

А. В. СЯСЄВ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей
вищих навчальних закладів*

Дніпропетровськ
Видавництво Дніпропетровського
національного університету
2007

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, проф. Я. Г. Савула
(Львівський національний університет ім. І. Франка)
доктор фізико-математичних наук, проф. А. Н. Хомченко
(Херсонський національний технічний університет)

доктор технічних наук, проф. М. М. Біляв
(Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту
ім. Лазаряна)

Сяєв А. В.

С 99 Диференціальні рівняння: Навч. посіб. – Д.: Вид-во ДНУ,
2007. – 356 с.

ISBN 978-966-551-234-9

Викладено основні теоретичні питання теорії звичайних диференціальних рівнянь та методи їх розв'язування (інтегрування). Наведені докладні розв'язання типових задач з додатковими поясненнями теоретичних положень, які при цьому застосовувались. Посібник має на меті допомогти студентам оволодіти основами теорії звичайних диференціальних рівнянь і практичними навичками їх розв'язання, а також навчити проводити дослідження розв'язків диференціальних рівнянь, що описують різноманітні процеси. Достатньо уваги приділено підбору і розв'язанню задач, що роз'яснюють основні ідеї, поняття, теоретичні факти та їх практичне застосування; підбору великого числа задач для самостійного розв'язання студентами.

Для студентів та аспірантів вищих навчальних закладів, викладачів і наукових співробітників, які цікавляться теорією звичайних диференціальних рівнянь.

УДК 004.421.2(075.8)
ББК 32.973.26 – 018я73

ЗМІСТ

| | |
|--|------------|
| Передмова | 6 |
| Розділ I. Основні поняття і означення теорії диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку | 7 |
| 1.1. Загальні питання. Задачі, що приводяться до диференціальних рівнянь | 8 |
| 1.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття і означення | 17 |
| 1.3. Основні класи рівнянь, які інтегруються в квадратурах | 29 |
| 1.4. Рівняння Ріккати | 49 |
| 1.5. Рівняння у повних диференціалах. Інтегруючий множник | 54 |
| 1.6. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку | 63 |
| 1.7. Особливі точки | 75 |
| 1.8. Диференціальні рівняння першого порядку, нерозв'язанні відносно похідної | 84 |
| 1.9. Особливі розв'язки. Обвідна сім'ї кривих | 92 |
| Розділ II. Диференціальні рівняння вищих порядків | 103 |
| 2.1. Загальні питання. Теорема про існування та єдиність розв'язку | 104 |
| 2.2. Рівняння n -го порядку, що інтегруються в квадратурах | 107 |
| 2.3. Рівняння, що допускають зниження порядку | 113 |
| Розділ III. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків | 119 |
| 3.1. Основні поняття і означення | 120 |
| 3.2. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку | 123 |
| 3.3. Формула Остроградського–Ліувілля та її застосування до знаходження загального розв'язку однорідного рівняння | 128 |
| 3.4. Зниження порядку лінійного однорідного диференціального рівняння | 133 |
| 3.5. Лінійні неоднорідні рівняння. Метод варіації довільних сталих | 138 |
| Розділ IV. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків із сталими коефіцієнтами | 147 |
| 4.1. Лінійні однорідні рівняння вищого порядку із сталими коефіцієнтами і диференціальні рівняння, що зводяться до них | 148 |
| 4.2. Рівняння Бесселя | 160 |
| 4.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищого порядку з сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною | 167 |
| 4.4. Крайові задачі | 180 |

| | |
|--|-----|
| Розділ V. Системи диференціальних рівнянь | 189 |
| 5.1. Нормальна система диференціальних рівнянь. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші | 190 |
| 5.2. Інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь методом виключення невідомих функцій | 195 |
| 5.3. Перший інтеграл. Симетрична форма системи диференціальних рівнянь | 200 |
| 5.4. Лінійна система диференціальних рівнянь. Загальні питання..... | 203 |
| 5.5. Лінійна однорідна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера..... | 207 |
| 5.6. Лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод Лагранжа | 219 |
| | |
| Розділ VI. Вступ до теорії стійкості | 225 |
| 6.1. Основні означення та теореми. Стійкість за Ляпуновим | 226 |
| 6.2. Дослідження на стійкість за першим наближенням..... | 233 |
| 6.3. Метод функцій Ляпунова..... | 236 |
| | |
| Розділ VII. Рівняння з частинними похідними першого порядку | 241 |
| 7.1. Основні поняття | 242 |
| 7.2. Лінійні однорідні рівняння | 245 |
| 7.3. Лінійні неоднорідні рівняння | 249 |
| | |
| Розділ VIII. Наближені методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь | 253 |
| 8.1. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів | 255 |
| 8.2. Метод послідовних наближень..... | 264 |
| 8.3. Метод малого параметра..... | 273 |
| 8.4. Знаходження періодичних розв'язків диференціального рівняння за допомогою рядів Фур'є та методу малого параметра | 275 |
| 8.5. Метод Ейлера..... | 290 |
| 8.6. Метод Рунге-Кутта..... | 296 |
| | |
| Розділ IX. Деякі застосування диференціальних рівнянь | 303 |
| 9.1. Геометричні задачі | 304 |
| 9.2. Фізичні задачі | 308 |
| 9.3. Задачі механіки..... | 314 |
| 9.4. Задачі теплопровідності..... | 330 |
| 9.5. Різні задачі | 336 |

| | |
|---|-----|
| ДОДАТКИ | 341 |
| <i>Додаток 1. Таблиця основних інтегралів</i> | 342 |
| <i>Додаток 2. Основні типи диференціальних рівнянь та метод їхнього розв'язування</i> | 343 |
| Предметний покажчик | 350 |
| Список рекомендованої літератури | 353 |

Навчальне видання
Сясєв Андрій Валерійович
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
Навчальний посібник

Редактор В. П. Пименов
Технічний редактор В. А. Усенко
Коректор В. П. Пименов
Комп'ютерна верстка О. М. Гришкіної

Підписано до друку 21.03.07. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Папір друкарський. Друк плоский.
Ум. друк. арк. 20,69. Обл.-вид. арк. 21,06. Ум. фарбовідб. 21,17. Тираж 300 пр.
Вид. № 1263. Зам. № 1082 .

Свідоцтво державної реєстрації № 289-ДК від 21.12.2000 р.

ДП «Видавництво ДНУ», пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050

ISBN 978-966-551-234-9



Сясев Андрій Валерійович – доцент, кандидат фізико-математичних наук, працює доцентом кафедри диференціальних рівнянь Дніпропетровського національного університету.

У 1993 році закінчив механіко-математичний факультет Дніпропетровського державного університету (нині – Дніпропетровський національний університет) і одержав кваліфікацію «механік, математик-прикладник». Після закінчення Дніпропетровського національного університету працював на посадах асистента (кафедра вищої математики Національної металургійної академії України), а потім старшого викладача кафедри диференціальних рівнянь. У 2002 році захистив кандидатську дисертацію за спеціальністю «механіка деформівного твердого тіла» і був обраний на посаду доцента.

Сясев А.В. – автор понад 50 наукових статей, а також 15 навчально-методичних розробок, у т.ч. навчальні посібники: «Математичне моделювання та методи розрахунку теплотехнологічних процесів» (у співавторстві), «Вступ до системи MathCAD», «Вища математика. Розділ: диференціальні рівняння». Наукові інтереси: механіка деформівного твердого тіла, математичні моделі в механіці деформівного твердого тіла, задачі термомеханіки.



В даному навчальному посібнику викладено основні теоретичні питання теорії звичайних диференціальних рівнянь та методи їх розв'язування (інтегрування). Наведені докладні розв'язання типових задач з додатковими поясненнями теоретичних положень, які при цьому застосовувались. Посібник має на меті допомогти студентам оволодіти основами теорії звичайних диференціальних рівнянь і практичними навичками їх розв'язання, а також навчити проводити дослідження розв'язків диференціальних рівнянь, що описують різноманітні процеси. Достатньо уваги приділено підбору і розв'язанню задач, що роз'яснюють основні ідеї, поняття, теоретичні факти та їх практичне застосування; підбору великого числа задач для самостійного розв'язання студентами.

Для студентів та аспірантів вищих навчальних закладів, викладачів і наукових співробітників, які цікавляться теорією звичайних диференціальних рівнянь